Αριθμητική Ανάλυση No. 1 Date 16/12/2019

$\boxed{n=3}$

$$w_0 = h\int_0^3 \frac{(s-1)(s-2)(s-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}\,ds = -h\int_0^3 \frac{1}{6}(s^3-6s^2+11s-6)\,ds$$

$$= -\frac{h}{6}\left[\frac{s^4}{4} - 2s^3 + \frac{11}{2}s^2 - 6s\right]_0^3 = -\frac{h}{6}\left[\frac{81}{4} - 54 + \frac{99}{2} - 18\right] =$$

$$= -\frac{h}{6}\cdot\frac{81-288+198}{4} = \frac{h}{6}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3h}{8}$$

$$w_1 = h\int_0^3 \frac{s(s-2)(s-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}\,ds = \frac{h}{2}\int_0^3 (s^3-5s^2+6s)\,ds =$$

$$= \frac{h}{2}\left[\frac{s^4}{4} - \frac{5}{3}s^3 + 3s^2\right]_0^3 = \frac{h}{2}\left(\frac{81}{4} - 45 + 27\right) =$$

$$= \frac{h}{2}\,\frac{(81-72)}{4} = \frac{9h}{8}$$

$$w_2 = w_1 = \frac{9h}{8}$$

$$w_3 = w_0 = \frac{3h}{8}$$

Τύπος ή Κανόνας των 3/8:

$$Q_4(f) = \frac{3h}{8}f(x_0) + \frac{9h}{8}f(x_1) + \frac{9h}{8}f(x_2) + \frac{3h}{8}f(x_3) =$$

$$= \frac{3h}{8}\big(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\big)$$

Παράσταση σφάλματος στον τύπο του τραπεζίου:

Έστω $f\in C^2[a,b]$ τότε, υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε το σφάλμα του τύπου του τραπεζίου να δίνεται ως

$$R_n(f) = I(f) - Q_2(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

Απόδειξη: $R_n(f) = I(f) - Q_2(f) = I(f) - Q_2(P_2) = I(f) - I(P_2) = I(f-P_2)$

$$R_2(f) = \int_a^b (f(x)-P_2(x))\,dx = \int_a^b (x-a)(x-b)\,\frac{f'''(\xi(x))}{2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x) f'''(\xi(x))\,dx$$

Έστω $m = \min_{a\le x\le b} f''(x)$, $M = \max_{a\le x\le b} f''(x)$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

$$m\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx \le \int_a^b (x-a)(b-x) f''(\xi)\,dx \le M\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx$$

Επομένως υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε $R_2(f) = -\frac{1}{2} f''(\xi)\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx$

$$\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx \underset{x=sh+a}{=} h^3\int_0^1 s(1-s)\,ds = h^3\int_0^1 (s-s^2)\,ds = h^3\left[\frac{s^2}{2}-\frac{s^3}{3}\right]_0^1 = \frac{h^3}{6}$$

$$R_2(f) = -\frac{1}{12} h^3 \cdot f''(\xi).$$

Σύνθετος Κανόνας του Τραπεζίου:

Θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση $x_0 = a$, $x_1 = h+a$, $x_2 = 2h+a$, $x_n = nh+a = b$, $h = \frac{b-a}{n}$

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx Q^T_{n+1}(f) = \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right) =$$

$$= h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

Παρουσίαση σφάλματος του Σύνθετου τύπου του Τραπεζίου:

Έστω $f\in C^2[a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε το σφάλμα του σύνθετου Τραπεζίου να δίνεται ως $R^T_{n+1} = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)$

$R^{T}_{m+1} = I(f) - Q^{T}_{m+2}(f) = R_2(f)|_{[x_0,x_1]} + R_2(f)|_{[x_1,x_2]} + \dots + R_m(f)|_{(x_{n-1},x_n)}$

Υπάρχουν $\xi_1 \in (x_0, x_1)$, $\xi_2 \in (x_1, x_2)$ ... $\xi_n \in (x_{n-1}, x_n)$

τέτοια ώστε $R^{T}_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{h^3}{12} f''(\xi_i) = -\frac{h^2}{12} \sum_{i=1}^{n} (b-a) \frac{1}{n} f''(\xi_i) =$

$= -\frac{b-a}{12} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f''(\xi_i) = -\frac{b-a}{2} h^2 f''(\xi)$ όπου $\xi \in (a,b)$

Ο τύπος του Simpson είναι ακριβής για πολ/μα 3ου βαθμού: $P_3(x) = ax^3 + P_2(x)$. Ο τύπος είναι ακριβής για το $P_2(x)$ διότι κατασκευάστηκε από την ολοκλήρωση του πολ. παρεμβολής στον $P_2$. Λόγω του ότι το ολοκλήρωμα είναι γραμμικός τελεστής αρκεί να αποδείξω ότι ο τύπος είναι ακριβής για το $x^3$.

$$I(x^3) = \int_a^b x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_a^b = \frac{b^4 - a^4}{4}$$

$$Q_3(x^3) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) = \frac{b-a}{6}\left(a^3 - 4\cancel{\left(\frac{b+a}{2}\right)^3} + b^3\right) =$$

$$= \frac{b-a}{4}\left(\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^3 + a^2b + ab^2 + \frac{1}{3}b^3 + \frac{2}{3}b^3\right) =$$

$$= \frac{b-a}{4}\left(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\right) = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

→ Παράσταση σφάλματος του τύπου του Simpson

Έστω $f \in C^4[a,b]$. Τότε το σφάλμα του τύπου του Simpson δίνεται ως $R_3(x) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2^4 \cdot 180}(b-a)^5$

$R_3(f) = I(f) - Q_3(f) = I(f) - Q_3(P_3) = I(f) - I(P_3) = I(f - P_3)$

Θεωρούμε το πολυώνυμο παρεμβολής της $f$ 3ου βαθμού τέτοιο ώστε $P_3(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,1,2$ και $f'(x_1) = P_3'(x_1)$

Тогда: $R_3(f) = \int_a^b (f(x) - P_3(x))\,dx = \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2 \cdot (x-x_2)\,dx =$

$= \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(b-x)\,dx = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(b-x)\,dx$

$= \int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(b-x)\,dx = h^5\int_0^2 s(s-1)^2(2-s)\,ds =$

$= h^5\int_0^2(-s^4+4s^3-5s^2+2s)\,ds = h^5\left[-\frac{s^5}{5}+s^4-\frac{5}{3}s^3+s^2\right]_0^2 =$

$= \ldots = R_3(f) = \frac{-(b-a)^5}{2^4 \cdot 180} \cdot f^{(4)}(\xi)$